PARAGRAAF 6.1 : TOPPEN EN BUIGPUNTEN

LES 1 TOPPEN

Een top is een punt waar de helling gelijk is aan nul.

STAPPENPLAN EXTREMEN / TOPPEN

(1) Los op $f'(x) = 0$ (helling is nul in een top)
(2) Schets de grafiek van f met de GR en zet deze op papier
(3) Bepaal de y-coördinaat en geef aan of het een maximum of minimum is

VOORBEELD 1

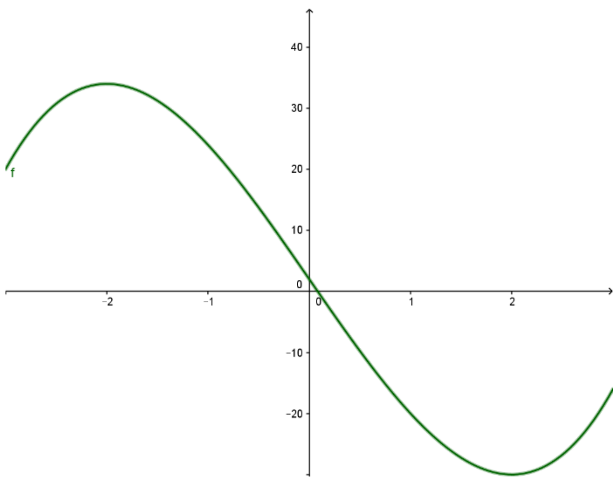
Gegeven is de formule $f(x) = 2x^3 - 24x + 2$ en $g(x) = 3x^2 - 8x + 1$

a. Bereken de extremen van f.
b. Toon aan dat er bij $x = 3$ geen extreem is bij de grafiek van g.

OPLOSSING 1

a. **(1)** $f'(x) = -6x^2 + 24 = 0$
$6x^2 = 24$
$x^2 = 4$
$x = 2 \ \ v \ \ x = -2$

(2) Schets geeft :



(3) max $y = f(-2) = 34$
min $y = f(2) = -30$

B. Je kunt x =3 invullen in de afgeleide om te kijken of er een top is
$f'(x) = 6x - 8$
$f'(3) = 6 \cdot 3 - 8 = 10 \neq 0$ dus GEEN top

LES 2 BUIGPUNT EN BUIGRAAKLIJN

DEFINITIE

- Buigpunt = { Punt waar de helling maximaal of minimaal is }
- Buigpunt berekenen $\Leftrightarrow f'(x)$ heeft een top
  $\Leftrightarrow f''(x) = 0$
- Buigraaklijn = { Raaklijn in het buigpunt }

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 2$

a. Bereken de buigpunten.
b. Bereken de buigraaklijn(en).

OPLOSSING 1

a. $f'(x) = 12x^3 - 36x^2$
$f''(x) = 36x^2 - 72x = 0 \Leftrightarrow 36x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\; v \;\; x = 2$
$x = 0 \rightarrow y = 2 \; dus \; (0{,}2)$
$x = 2 \rightarrow y = -46 \; dus \; (2, -46)$

Controle : Kijk in $f'(x)$. Er is een top bij $x = 0$ en bij $x = 2$. Daarom zijn dit twee buigpunten.

b. *Raaklijn in x=0*
(1) $a = f'(0) = 0$
(2) $y = 2$
(3) Raaklijn : $y = 2$

Raaklijn in x=2
(1) $a = f'(2) = -48$
(2) $y = -46$
(3) $-46 = -48 \cdot 2 + b \;\; \rightarrow b = 50$
(4) $y = -48x + 50$

PARAGRAAF 6.2 : DE AFGELEIDE VAN MACHTSFUNCTIES

VOORBEELD 1

Differentieer en schrijf zonder minmachten en gebroken machten (½ etc.)

a. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$

b. $g(x) = \frac{3-x^2}{x^3}$

c. $h(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

OPLOSSING 1

a. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} = x^{-1} + 4x^{-2}$

$f'(x) = -1x^{-2} - 8x^{-3} = \frac{-1}{x^2} - \frac{8}{x^3}$

b. $g(x) = \frac{3-x^2}{x^3}$

$g(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} = 3x^{-3} - x^{-1}$

$g'(x) = -9x^{-4} + x^{-2} = \frac{-9}{x^4} + \frac{1}{x^2}$

c. $h(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$

$h'(x) = -\frac{1}{8}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}\frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}}$ $\left(= -\frac{1}{8}\frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{8}\frac{1}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}\right)$

PARAGRAAF 6.3 : DE KETTINGREGEL

LES 1 : DE KETTINGREGEL

VOORBEELD 1

Differentieer de functie $f(x) = (x^2 - 4x)^7$

POGING 1 : HAAKJES WEGWERKEN

Je haalt de haakjes weg. Maar dat is niet te doen !!!

POGING 2 : DE KETTINGREGEL GEBRUIKEN

Deze functie bestaat eigenlijk uit twee delen :

x → x^2 - 4x → $(x^2 - 4x)^7$. **(Stel u = x^2 - 4x)**

u → u^7

THEORIE KETTINGREGEL

Kettingregel : $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

OPLOSSING 1A : MET U

(1) Neem $u = x^2 - 4x$ $\rightarrow u' = 2x - 4$

Dan is $f(u) = u^7$ $\rightarrow f'(u) = 7u^6$

(2) $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 7u^6 \cdot (2x - 4) = 7(x^2 - 4x)^6 \cdot (2x - 4)$

OPLOSSING 1B : SNELLE MANIER

$f'(x) = 7(x^2 - 4x)^6 \cdot (2x - 4)$

× afgeleide

VOORBEELD 2

Differentieer

a. $f(x) = \sqrt{5x + 2}$

b. $g(x) = 3x + 7 - \sqrt{10 - 4x}$

OPLOSSING 2

We lossen dit op, op de snelle manier.

a. $f(x) = \sqrt{5x + 2} = (5x + 2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\frac{1}{2}}{(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\frac{1}{2}}{\sqrt{5x+2}}$$

b. $g(x) = 3x + 7 - \sqrt{10 - 4x} = 3x + 7 - (10 - 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{2}(10 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4 = 3 + 2\frac{1}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{2}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{2}{\sqrt{10-4x}}$$

OPMERKING KETTINGREGEL

De uitleg van de kettingregel is als volgt :

- Je kunt de afgeleide ook schrijven als $f'(x) = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}$
- Dit geeft :
  $$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} \times \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{du}} = \frac{\mathrm{df} \cdot \mathrm{du}}{\mathrm{dx} \cdot \mathrm{du}} = \frac{\mathrm{df} \cdot \mathrm{du}}{\mathrm{du} \cdot \mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{du}} \times \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f}'(\mathrm{u}) \cdot \mathrm{u}'(\mathrm{x})$$
- Dus $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}'(\mathrm{u}) \cdot \mathrm{u}'(\mathrm{x})$

LES 2 : DE KETTINGREGEL MET DE PRODUCTREGEL (PR) OF QUOTIËNTREGEL (QR)

VOLGORDE HULPREGELS DIFFERENTIËREN

Soms krijg je meerdere regels gecombineerd. Er geldt dan de volgende regel

(1) Eerst PR of QR toepassen

(2) Dan pas de kettingregel toepassen (kan ook binnen de QR of PR nodig zijn).

VOORBEELD 1

Differentieer de functie $f(x) = 9x(x^2 - 6x)^5$

OPLOSSING 1

(1) Eerst de losse delen differentiëren van de productregel :

$$g = 9x \quad \rightarrow g' = 9$$
$$h = (x^2 - 6x)^5 \quad \rightarrow h' = 5(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6)$$

× afgeleide

(2) Nu de productregel invullen :

$$f'(x) = 9 \cdot (x^2 - 6x)^5 + 9x \cdot 5(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6)$$
$$f'(x) = 9(x^2 - 6x)^5 + 45x(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6)$$

VOORBEELD 2

Differentieer de functie $f(x) = 3x\sqrt{6-2x}$

Toon aan dat deze te schrijven is als $f'(x) = \frac{18-9x}{\sqrt{6-2x}}$.

OPLOSSING 2

(1) Eerst de losse delen differentiëren van de productregel :

$g = 3x \qquad \rightarrow g' = 3$

$h = \sqrt{6-2x} = (6-2x)^{\frac{1}{2}} \qquad \rightarrow h' = \frac{1}{2}(6-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = -1 \cdot \frac{1}{(6-2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{6-2x}}$

(2) Nu de productregel invullen

$$f'(x) = 3x \cdot \frac{-1}{\sqrt{6-2x}} + 3 \cdot \sqrt{6-2x}$$

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{6-2x}} + \frac{3\sqrt{6-2x}}{1} \times \frac{\sqrt{6-2x}}{\sqrt{6-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{6-2x}} + \frac{3(6-2x)}{\sqrt{6-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{6-2x}} + \frac{18-6x}{\sqrt{6-2x}} = \frac{18-9x}{\sqrt{6-2x}}$$

PARAGRAAF 6.4 : TOPPEN EN SNIJPUNTEN

LES 1 : AANTAL OPLOSSINGEN VOOR Y=P

VOORBEELD 1

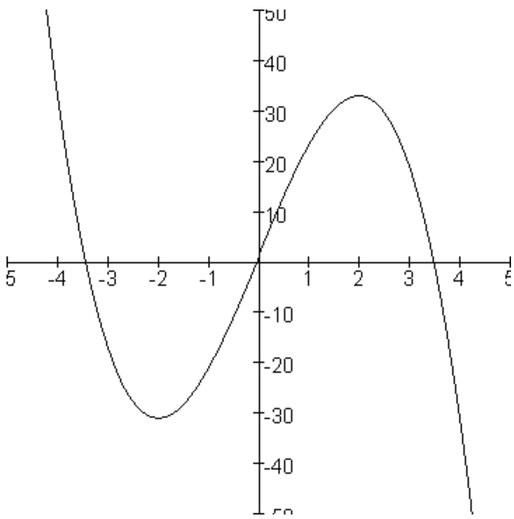
Gegeven is $f(x) = -2x^3 + 24x + 1$

a. Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

b. Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking f(x) = p er 3 oplossingen zijn.

OPLOSSING 1

Maak eerst een schets :



a. Toppen $f'(x) = 0 \rightarrow$ $-6x^2 + 24 = 0$

$6x^2 = 24$

$x^2 = 4$

$x = 2 \ v \ x = -2$

$y = 33 \ v \ y = -31$

b. De lijn $y = p$ heeft 3 oplossingen als $-31 < p < 33$

LES 2 : EXTREMEN EN ONBEKENDE P

VOORBEELD 1

Gegeven is $f(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}px^3 + px^2 + 1$

a. Bereken algebraïsch voor welke p er precies één extreem is.

b. Bereken algebraïsch voor welke p er een maximum is in $x = 2$

OPLOSSING 1

a. Toppen $f'(x) = 0 \rightarrow$ $-8x^3 + px^2 + 2px = 0$

$x(-8x^2 + px + 2p) = 0$

$x = 0 \quad v \quad -8x^2 + px + 2p = 0$

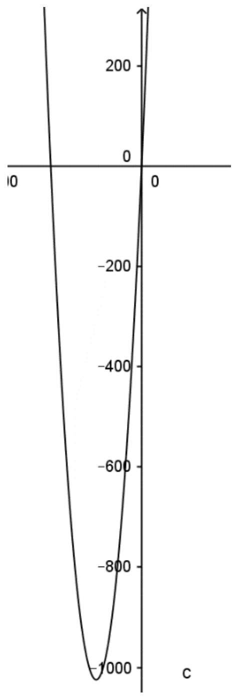
(1) Er is maar 1 extreem als $-8x^2 + px + 2p = 0$ géén oplossing heeft (D < 0).
Dus $D = p^2 - 4 \cdot -8 \cdot 2p = p^2 + 64p < 0$

(2) Gelijkheid $p^2 + 64p = 0$

$p(p + 64) = 0$

$p = 0 \ v \ p = -64$

(3) Schets maken van $D = p^2 + 64p$:



(4) Oplossing aflezen
$p^2 + 64p < 0$ als $-64 < p < 0$

b. Bij x = 2 een oplossing dus $f'(2) = 0$

$f'(2) = -8 \cdot 2^3 + p \cdot 2^2 + 2p \cdot 2 = 0$

$-64 + 4p + 4p = 0$

$8p = 64$

$p = 8$

LES 3 : RAAKLIJNEN EN ONBEKENDE P EN Q

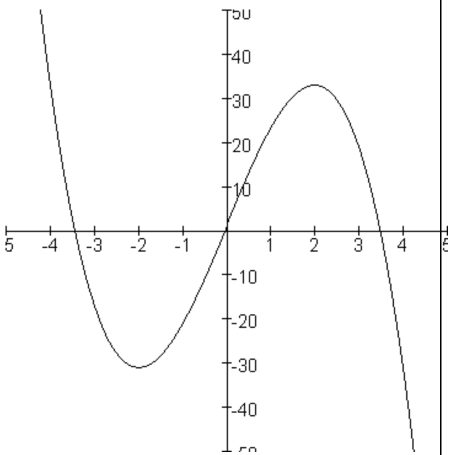
VOORBEELD 1

Gegeven is $f(x) = -2x^3 + 24x + 1$

Bereken voor welke q de lijn $y = 18x + q$ precies 2 snijpunten met f heeft.

OPLOSSING 1

Maak weer eerst een schets. Je ziet dan :



- De stijgende lijn $y = 18x + q$ heeft ALTIJD 1 snijpunt.
- In de raakpunten zijn er precies 2 snijpunten, dus :

(1) Eerst de raakpunten uitrekenen

$f'(x) = g'(x)$

$-6x^2 + 24 = 18$

$-6x^2 = -6$

$x^2 = 1$

$x = 1 \ v \ x = -1$

$y = 23 \ v \ y = -21$

Dus raakpunten $(1,23)$ en $(-1,-21)$.

Nu de q uitrekenen :

(2) Raakpunt $(1,23)$ en lijn $y = 18x + q$

$23 = 18 \cdot 1 + q \quad \rightarrow q = 5$

Raakpunt $(-1,-21)$ en lijn $y = 18x + q$

$-21 = 18 \cdot -1 + q \quad \rightarrow q = -3$

(3) Dus er zijn precies 2 snijpunten bij $q = -3 \ v \ q = 5$.

LES 4 : TOPPENFORMULE VOOR P

VOORBEELD 1

Gegeven is $f_p(x) = px^2 + 8x + 9$. Bepaal de formule waar alle toppen van f_p op liggen.

OPLOSSING 1

(1) Top → $f'(x) = 0$ dus

$$2px + 8 = 0$$
$$2px = -8$$
$$px = -4$$
$$x = -\frac{4}{p}$$

(2) Toppenformule

$$f(x) = \frac{-4}{x} \cdot x^2 + 8x + 9 = -4x + 8x + 9 = 4x + 9$$

dus $f(x) = 4x + 9$

OPMERKING

Alle toppen liggen op de lijn $y = 4x + 9$.

In een plaatje betekent dit :